Date 22/03/2018

Μάθημα 5ο

Μεθοδολογίες Εύρεσης Εκτιμητών

Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Ορισμός: Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. ή σ.π. $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$
Η συνάρτηση πιθανοφάνειας ορίζεται:

$$L(\theta / \underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

Ορισμός ΕΜΠ
Ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ είναι η τιμή του θ για την οποία μεγιστοποιείται η συνάρτηση πιθανοφάνειας.

Παρατηρήσεις.
1) Ο Ε.Μ.Π. είναι είτε μοναδικός είτε πάρα πολλοί είτε κανένας
2) Πολλές φορές είναι πολύ πιο εύκολο αντί να μεγιστοποιήσεις τη συνάρτηση πιθανοφάνειας να μεγιστοποιήσεις τον λογάριθμό της.
3) Αν ο $\hat{\theta}$ είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας το θ. Τότε ο $g(\hat{\theta})$ είναι ο Ε.Μ.Π. του $g(\theta)$
4) Το $\hat{\theta}$ (ΕΜΠ) παίρνει τιμές στον παραμετρικό χώρο Θ
Δηλ. $\hat{\theta} \in \Theta$

Πρόταση (Ιδιότητες το Ε.Μ.Π.)
1η) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $f(x,\theta)$
Αν $\hat{\theta}$ ο Ε.Μ.Π. είναι μονοσήμαντα ορισμένος
Τότε είναι συνάρτηση της επαρκούς σ.σ.

NO

Date

Απόδειξη. (Σκιαγράφηση)

$\hat{\theta}$ μεγιστοποιεί την συνάρτηση πιθανοφάνειας

$L(\theta / \underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ $\underset{\text{Τ επαρκής σσ.}}{\underline{\underline{\text{παραγοντικό θεώρημα.}}}}$ $g(T(\underset{\sim}{x},\theta))\, h(\underset{\sim}{x})$, μεγιστοποίηση ως προς θ

Άρα ισοδύναμα $\hat{\theta}$ μεγιστοποιεί την $g(T(x),\theta)$

άρα $\hat{\theta}$ συνάρτηση του $T(x)$

2η

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από $f(x;\theta)$

Ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας της CR και επιπλέον επιτυγχάνεται η ισότητα για μία σ.σ. $U = U(X_1,\ldots,X_n)$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = K(\theta,n) \cdot (U - g(\theta))$$

με U να είναι ΑΟΕΔ της $g(\theta)$

Έστω $g(\theta)=\theta$ (αυτό ισχύει όταν επιτυγχάνεται η ισότητα)

Τότε:

Η παράγωγος ως προς θ του λογαρίθμου της συναρτ. πιθανοφ. μηδενίζεται για $U = \hat{\theta}$ (Το U είναι πιθανό σημείο μεγ. π. ελ.)

Για να εξασφαλίσω ότι είναι σημείο μεγίστου θα πρέπει

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln \prod f(x,\theta)\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

3η Σελ 52 του βιβλίου του Κ. Φερεντίνου. (τις ιδιότητες)

$\hat{\theta}_n$ συνεπής $\to$ ΕΚΜ. (έχει μέσα το μέγεθος του δείγματος)

$\hat{\theta} = \frac{\sum X_i}{n}$

(i) $E\hat{\theta} = \theta$ ή $E\hat{\theta} \xrightarrow{n\to\infty} \theta$

(ii) $Var\,\hat{\theta} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(iii) $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{K} N(0, I_x^{-1}(\theta))$

κατά κατανομή, σ.σ. πηγαίνει ασυμπτωτικά στην κανονική κατανομή

NO.

Date

Παραδειγμα

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τδ. εκθ. $(1/\theta)$

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} \quad , x \geq 0$$

ΕΜΠ της θ;

Λύση.

$$L(\theta / \underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x_i} =$$

$$= \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad , \theta > 0 \qquad \text{(επαρκεια)}$$

$$\log L(\theta / X) = -n \cdot \log\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \log L(\theta / X)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Δε μπορούμε να απαλοιφάμε για το πρόσημο)

Παίρνω το σημείο που μηδενίζεται η 1η παράγωγος.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log(\theta / X) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta^2} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n}}$$ πιθανό σημείο.

περίμενα να έχει

Το $\sum x_i$ μέσα λόγω επαρκειας

Το πιθανό αυτό σημείο που βρήκαμε μπορεί να είναι είτε μέγιστο είτε ελάχιστο. Οπότε τώρα παίρνω 2η παράγωγο.

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta / X) \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2 \sum x_i}{\theta} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} =$$

$$= \frac{n}{(\sum x_i / n)^2} - \frac{2 \sum x_i}{(\sum x_i / n)^3} < 0$$

Άρα μπορώ να πω ότι ο ΕΜΠ είναι το $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$

Π.Χ ② $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $P(\theta)$

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots \quad \theta > 0$$

$$L(\theta/x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!}, \quad \theta > 0$$

$$\log L(\theta/x) = \sum x_i \log\theta - n\theta - \log \prod x_i!$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log(L(\theta/x)) = \frac{\sum x_i}{\theta} - n$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(\theta/x) = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{\theta} = n \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\sum x_i}{n}}$$

Άρα θα εξετάσω αν $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log(L(\theta/x)) = -\frac{\sum x_i}{n} < 0$$

Π.Χ ③ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $U(0,\theta)$

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} \quad 0 < x < \theta$$

$$L(\theta/x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}$$ (φθίνουσα ως προς θ)

ΠΡΟΣΟΧΗ : να γράψω το π.ο. του θ !!!
(χωρίς αυτό δεν έχω συνάρτηση)

$$\left.\begin{array}{l} 0 < X_1 < \theta \\ 0 < X_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < X_n < \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{X_{(n)} < \theta}$$ π.ο. του θ.

NO.

Date

$\log L(\theta/X) = -n\log\theta$

$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta/X) = -\frac{n}{\theta} < 0$

Άρα ο $\log L(\theta/X)$ φθίνουσα συνάρτηση του θ.
Άρα λαμβάνει το μέγιστο στο κάτω άκρο του
π.ο. ως προς θ. → Αυτό είναι το $X_{(n)}$

Άρα $\boxed{\hat{\theta} = X_{(n)}}$

πχ. 4ο $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $U(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$

$f(x,\theta) = 1 \qquad \theta - 1/2 < x < \theta + 1/2$

$L(\theta/x) = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1.$

$$\left.\begin{aligned}
&\theta - \tfrac{1}{2} < X_1 < \theta + 1/2 \Rightarrow X_1 - 1/2 < \theta < X_1 + 1/2 \\
&\theta - 1/2 < X_2 < \theta + 1/2 \Rightarrow X_2 - 1/2 < \theta < X_2 + 1/2 \\
&\quad\vdots \\
&\theta - 1/2 < X_n < \theta + 1/2 \Rightarrow X_n - 1/2 < \theta < X_n + 1/2
\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \boxed{X_{(n)} - 1/2 < \theta < X_{(1)} + 1/2}$

$\hat{\theta}$ είναι οτιδήποτε ανήκει $(X_{(n)} - 1/2, X_{(1)} + 1/2)$
δηλ οποιοσδήποτε κυρτός συνδιασμός:
$\lambda(X_{(n)} - 1/2) + (1-\lambda)(X_{(1)} + 1/2) \quad \lambda \in (0,1)$
Άρα άπειροι Ε.Μ.Π. πχ. $n\mu^2 X_1$ έχει και το X_1
και είναι στο $(0,1)$

NO.

Date

π.χ. 5ο $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Τ.Δ.

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta$$

↓ εκθετική μετατοπισμένη κατά θ

$$L(\theta/x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} = e^{-\sum x_i} \cdot e^{n\theta}, \quad \theta \leq X_{(1)}$$

π.ο. ως προς θ!

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq \theta \\ X_2 \geq \theta \\ \vdots \\ X_n \geq \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta \leq X_{(1)}}$$

$$\log L(\theta/x) = -\sum x_i + n\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(\theta/x) = n > 0$$

παίρνει μέγιστο στο πάνω άκρο του π.ο.

αύξουσα συνάρτηση ως προς θ $\boxed{\hat{\theta} = X_{(1)}}$

π.χ. 6ο $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Τ.Δ. από την $N(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 = \mu$, $\theta_2 = \sigma^2$

Εκτιμ. διάνυσμα παραμέτρων (θ_1, θ_2)

$$f(x,\theta) = f(x,\theta_1,\theta_2) = (2\pi\theta_2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}(x-\theta_1)^2}, \quad \theta_1 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ \theta_2 > 0$$

$$L(\theta/x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = (2\pi\theta_2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}$$

$$\log L(\theta/x) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\theta_2) - \frac{1}{2\theta_2}\sum(x_i-\theta_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log L(\theta/x) = +\frac{1}{2\theta_2} 2\sum(x_i-\theta_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log L(\theta/x) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2}\sum(x_i-\theta_1)^2$$

NO.

Date

- $\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log L(\theta/x)=0 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_1=\frac{\sum x_i}{n}}$

$\left(\sum(x_i-\theta_1)=0 \Rightarrow \sum x_i - n\theta_1 = 0\right)$

- $-\frac{n}{2}\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{2\theta_2^2}\sum(x_i-\hat{\theta}_1)^2=0 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_2=\frac{\sum(x_i-\hat{\theta}_1)^2}{n}}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} \end{vmatrix}$$

← Δεν θα το παίρναμε αυτό (ενώ πρέπει)

Εκτίμηση με τη μέθοδο των ροπών

Έστω $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με σ.π. ή σ.π.π. $f(x;\theta)$. Η εκτίμηση με τη μέθοδο ροπών έγκειται στην εξίσωση των δειγματικών ροπών κ-τάξης $\frac{1}{n}\sum x_i^k = m_k$ με τις αντίστοιχες πληθυσμιακές ροπές $EX^k = \mu_k$

Π.χ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από την Γάμμα(a,b)

$f(x;a,b)=\frac{x^{a-1}e^{-x/b}}{b^a\,\Gamma(a)}, \quad x\geq 0$

$EX = a\cdot b$

$\mathrm{Var}X = a\cdot b^2$

$\mu_k = EX^k$

$m_k = \frac{1}{n}\sum x_i^k$

NO.

Date

$$m_1 = \mu_1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n}\Sigma X_i = a\beta} \quad (1)$$

$$m_2 = \mu_2 \Rightarrow \frac{1}{n}\Sigma X_i^2 = EX^2 \Rightarrow \frac{1}{n}\Sigma X_i^2 = VarX + (EX)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n}\Sigma X_i^2 = \underbrace{a\cdot\beta^2}_{=a\cdot\beta\cdot\beta = \bar{X}\cdot\beta} + (\underbrace{a\cdot\beta}_{=\bar{X}})^2} \quad (2)$$

Άρα έχω:

$$\begin{cases} a\beta = \bar{X} \\ \bar{X}\cdot\beta + (\bar{X})^2 = \frac{\Sigma X_i^2}{n} \end{cases}$$

Άρα:
$$\boxed{\tilde{\beta} = \frac{\frac{\Sigma X_i^2}{n} - \bar{X}^2}{\bar{X}}}$$

και
$$\boxed{\tilde{a} = \frac{\bar{X}}{\tilde{\beta}} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{\Sigma X_i^2}{n} - \bar{X}^2}}$$

NO

Date

Ασκήσεις από Βιβλίου Φρεντζίνου.

Άσκηση 1.9 - Άσκηση 1.15 (ενδιαφέρον)

$X_1, X_2, \dots, X_n$: τ.δ. $f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$

Βρείτε ΑΟΕΔ εκτίμηση της θ. $-\infty < \theta < +\infty$

Λύση.

1η: C-R 2η: L-S. (μεθοδολογίες)

Εδώ εξαρτάται από το θ. Το π.ο.

Άρα παίρνω L-S.

- επαρκή και πλήρης 6.6.
- συνάρτηση του επ + πλ. που να είναι αμερόληπτη.

• $\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} = e^{-\sum x_i} \boxed{e^{n\theta} \; I_{(-\infty, X_{(1)})}(\theta)}$

- Συνάρτηση του (x,θ) $\quad h(x)$
- και π.ο. $\quad g(X_{(1)},\theta)$

$$\left.\begin{array}{l} \theta \leq X_1 \\ \theta \leq X_2 \\ \vdots \\ \theta \leq X_n \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta \leq X_{(1)}} \text{ π.ο.}$$

$\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = g(X_{(1)},\theta) \cdot h(x) \right)$

Άρα $X_{(1)}$ επαρκής

Έστω $\boxed{T = X_{(1)}}$.

$E\,h(T) = 0 \;\; \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \;\; \forall t$

T συνεχής ή διακριτή; $\left. \begin{array}{l} T \to \min X_i \\ X_1 \text{ συνεχής} \end{array} \right\} T \to \text{συνεχής}$

Αρα $\int \underline{h(t)}\, f_T(t)\, dt$ $\quad f_T(t) = ;$

σ.π.π.

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ $\min X_i = X_{(1)}$

$$F_{X_{(1)}}(y) = P(\underbrace{\min X_i \leq y}_{\text{Δε ξέρω τι γίνεται εδώ}}) = 1 - P(\underbrace{\min X_i > y}_{\text{Άρα πάω εδώ που ξέρω}}) =$$

$$= 1 - P(X_1 > y\ X_2 > y \ldots X_n > y) \overset{\text{ανεξ.}}{=}$$
$$= 1 - P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \ldots P(X_n > y) \quad \underline{\text{ισόνομες}}$$
$$= 1 - P^n(X > y) =$$

$$= 1 - (1 - F_X(y))^n \quad \text{(Κάθε φορά πρέπει απόδειξη)}$$

$$f_{X_{(1)}}(y) = n \cdot (1 - F_X(y))^{n-1} f_X(y) \quad \text{) παράγωγος}$$

Εφαρμογή: $T \equiv X_{(1)} \quad f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, x \geq \theta$

$$f_T(t) = n\left[1 - F_X(t)\right]^{n-1} f_X(t) =$$

$$= n\left[1 - (1 - e^{-(t-\theta)})\right]^{n-1} e^{-(t-\theta)}, \quad t \geq \theta \quad (*)$$

$$F_X(x) = \int_\theta^x e^{-(y-\theta)} dy = e^\theta - e^{-y}\Big|_\theta^x = e^\theta(e^{-\theta} - e^{-x}) =$$
$$= 1 - e^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta$$

$$(*) \Rightarrow f_T(t) = n \cdot e^{-n(t-\theta)}, \quad t \geq \theta$$

$$E\,h(T) = 0 \ \forall\theta \Rightarrow \int_\theta^{+\infty} h(t) \cdot n \cdot e^{-nt} e^{n\theta} dt = 0 \ \forall\theta$$

NO

Date

$$\Rightarrow \int_{\theta}^{+\infty} h(t)\cdot e^{-nt}\,dt = 0 \quad \forall\theta$$

$$\Rightarrow h(\theta)\cdot e^{-n\theta} = 0 \quad \forall\theta \Rightarrow \boxed{h(t)=0 \ \forall t}$$

πληρότητα

• Τώρα χρειαζόμαστε αμεροληψία

$$ET = \int_{\theta}^{+\infty} tn\, e^{-n(t-\theta)}\,dt \qquad t-\theta=w$$

$$= \int_{0}^{+\infty} (w+\theta)n\cdot e^{-nw}\,dw =$$

$$= \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \underbrace{wn\cdot e^{-nw}}_{Εκθ(n)}\,dw}_{\int_{0}^{+\infty} w\cdot σπη(w)\,dw} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \theta \underbrace{n\cdot e^{-nw}}_{σπη.\ Εκθ(n)}\,dw}_{\theta\cdot 1 = \theta}$$

$\int_{0}^{+\infty} w\cdot σπη(w)\,dw$ || μέση τιμή Εκθ(n)

$1/n$

Άρα $ET = \frac{1}{n} + \theta \Rightarrow E\left(T - \frac{1}{n}\right) = \theta$

Άρα

$T - \frac{1}{n}$ ΑΟΕΔ της θ

NO

Date

Εργασια

Στην ιδια ασκηση εξεταστε αν μπορειτε να βρειτε ΑΟΕΔ για την $\frac{1}{\theta}$